Formelsammlung Elektrotechnik /2. Semester (Krippendorf/ Dr. Kurz) (Stand 9/03)

Inhalt:

1. Gleichstromlehre

1.1.1 Grundlagen

Elementarladung: kleinste Ladung = Ladung eines Elektrons e^-

$e = 1{,}602 \times 10^{-19}\, C$ [Coulomb]

$$I = \frac{Q}{t} \Rightarrow Q = I \cdot t \Rightarrow [C = As]$$

Aufgabe: Wieviel Ladungen trägt ein Coulomb?

$$N = \frac{Q}{e} = \frac{1C}{1{,}602 \cdot 10^{-19} C} = \underline{\underline{6{,}2422 \cdot 10^{18}}}$$

Elektronenzahl (Elektronendichte)

$$n = \frac{N}{V}; \qquad \left[\frac{1}{m^3}\right]$$

für fast alle Metalle gilt: $n \approx 10^{29} m^{-3}$ Beispiel: Cu $n_{Cu} = 8{,}23 \cdot 10^{28} m^{-3}$

Ni $n_{Ni} = 1{,}8 \cdot 10^{29} m^{-3}$

Aufgabe: Wie groß ist die Ladungsmenge in einem Cu-Draht mit 2m Länge und 1,5mm² Querschnittsfläche?

$$N = n_{Cu} \cdot V = 8{,}23 \cdot 10^{28} m^{-3} \cdot 2m \cdot 1{,}5 \cdot 10^{-6} m^2 = \underline{\underline{2{,}469 \cdot 10^{23}}}$$

$$\Rightarrow Q = ne = \underline{39.553{,}38C}$$

1.1.2 Strom, Stromstärke

Ein Strom entsteht durch Ladungsträgerbewegung:
- Elektronen in Leitern
- Ionen in Elektrolyten / Flüssigkeiten

$$I = \frac{Q}{t}\ ;\ [A] \text{ Ampere} \qquad I = \frac{dQ}{dt} \text{ gilt für zeitvarianten Strom, Wechselstrom}$$

für zeitlich konstante Stromstärke gilt:

$$I = \frac{Q}{t}; \qquad Q = ne\,;\ n = \frac{N}{V};$$

$$\Rightarrow I = \frac{n \cdot e \cdot V}{t}; \qquad V = l \cdot A$$

$$\Rightarrow I = \frac{n \cdot e \cdot l \cdot A}{t}; \qquad v = \frac{l}{t};$$

$$\Rightarrow I = n \cdot e \cdot v \cdot A$$

Aufgabe: Ladung / Elektrizitätsmenge für Gleichstrom mit 3A über 60sec.

$$I = \frac{Q}{t} \to Q = I \cdot t = 3A \cdot 60s = \underline{\underline{180C}}$$

Aufgabe: Eine leere Batterie wird über ein Cu-Leitung mit 1,5mm² ein Stunde mit 10A aufgeladen. Gesucht ist Q, N, v

$$Q = I \cdot t = 10A \cdot 3600s = \underline{3{,}6 \cdot 10^4\,As}$$

$$N = \frac{Q}{e} = \frac{3{,}6 \cdot 10^4\,As}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\,As} = \underline{2{,}247 \cdot 10^{23}}$$

$$v = \frac{I}{n_e \cdot A} = 0{,}5 \cdot 10^{-3}\,ms^{-1}$$

technische Stromrichtung - durch positive Ladungsträger festgelegt

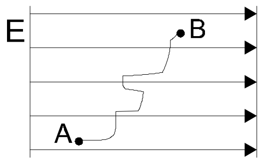
- von PLUS nach MINUS

(physikalische Stromrichtung im Leiter: durch e^- - Ladungen festgelegt !!)

Stromdichte: $S = \frac{I}{A} \quad \left[\frac{A}{m^2}\right]$

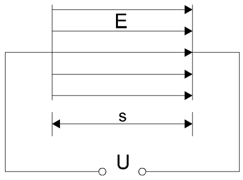
1.1.3 Spannung und Potential

$$W_{A,B} = \vec{F} \cdot \vec{s}\,; \quad \vec{F} = Q \cdot \vec{E} \quad \Rightarrow W_{A,B} = Q \cdot \vec{E} \cdot \vec{s}$$



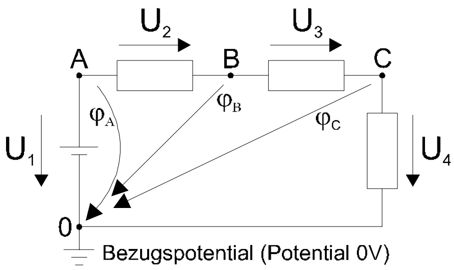
Definition für Spannung

$$U_{A,B} = \frac{W_{A,B}}{Q} = \vec{E} \cdot \vec{s}$$



elektrisches Potential

- als Bezugspunkt bzw. Bezugspotential wird das Erdungspotential = 0V verwendet.



Spannung = Potentialdifferenz $\quad U_{A,B} = \varphi_A - \varphi_B$

1.1.4 Elektrischer Widerstand

- Materialien (Metalle) bei denen der Widerstand mit zunehmender Temperatur steigt
- Halbleiter (Kohle): Widerstand sinkt bei steigender Temperatur

allgemein: $R = \frac{l}{A} \cdot \rho \quad [\Omega]$ $\qquad \rho$: spezifischer Widerstand $[\Omega \cdot m]$

Leitwert: $G = \frac{1}{R} = \frac{A}{\rho \cdot l} = \kappa \cdot \frac{A}{l} \quad [S] \quad Siemens\,; \qquad \kappa_{Cu} = 56\,S\,m/mm^2$

Leitwert und Kapazität - analoge Beziehung: $G = \kappa \cdot \frac{A}{l} \qquad C = \varepsilon \cdot \frac{A}{l}$

Temperaturabhängigkeit

$\frac{\Delta R}{R} = \alpha \cdot \Delta T \qquad \frac{\Delta R}{R}$ ... relative Widerstandsänderung

α ... Temperaturkoeffizient $\left[\frac{1}{K}\right]; \left[\frac{1}{°C}\right]$

$\Rightarrow \Delta R(T) = R_B \cdot \alpha (T - T_B)$ $\qquad$ meist als Bezug $T_B = 20°\,C$

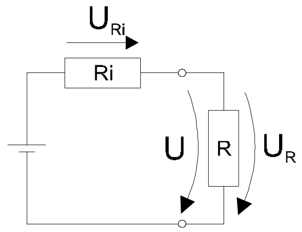
$$\left[R(T) = R_B(1 + \alpha\Delta T + \beta\Delta T^2)\right]$$

1.2 Einfacher Stromkreis

1.2.1 Ohmsches Gesetz

$$mit\ \Delta T = 0 \to \Delta R(T) = 0 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{U}{I} = konstant$$

1.2.2 Berechnungen im einfachen Stromkreis



reale Spannungsquelle mit idealer Quellspannung + Innenwiderstand R_i

Konvention: - Strom von + nach -
- Spannung U_q an der Spannungsquelle ebenfalls von + nach -

Es gilt: $U_{R_i} = R_i \cdot I \qquad U_R = R \cdot I = U$

$$W_{zu} = W_{ab}$$
$$W_q = W_{R_i} + W_R\,; \quad W = U \cdot Q$$
$$U_q \cdot Q = U_{R_i} \cdot Q + U_R \cdot Q$$
$$U_q = U_{R_i} + U_R$$

allgemein: Quellspannung = Summe der Spannungsabfälle an den Widerständen

$$U = U_q - U_{R_i}$$
$$U = U_q - R_i \cdot I \quad = U_q, wenn\ I = 0$$
$$I = \frac{U}{R_i + R}\Bigg|_{R>>}^{\cong 0}$$ Spannungsmessung

Kurzschlußstrommessung, dh. $R = 0 \quad \Rightarrow \quad U = 0$

$$I_K = \frac{U_q}{R_i}$$

Bestimmung des Innenwiderstandes

$$R_i = \frac{U_q}{I_K} = \frac{U_L}{I_K} \qquad U_L: \text{Leerlaufspannung}$$
$$U_L = U_q - U_{R_i}$$

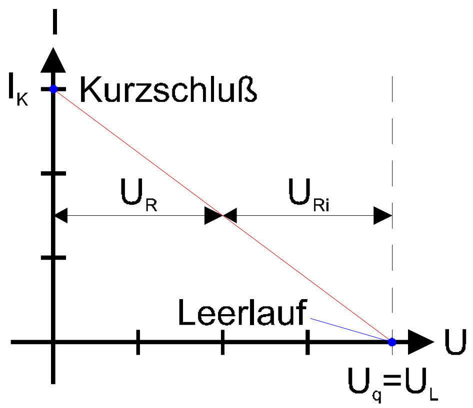
- $R >> \quad \to \quad I \cong 0 \quad \Rightarrow \quad U_L = U_q$
- $R << (R = 0) \quad \to \quad U = 0$

Kurzschluß: $\quad I_K = \frac{U_q}{R_i} \quad \Rightarrow \quad R_i = \frac{U_L}{I_K}$

$\Rightarrow$ Verhalten einer realen Spannungs quelle durch U_L und I_K vollständig bestimmt $(\to R_i)$

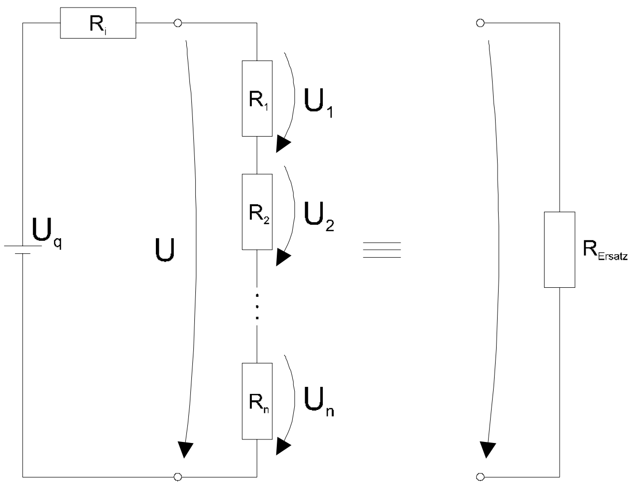
(Ersatzspannungsquelle)

Spannung-Strom-Kennlinie:



Serien- / Reihenschaltung von Widerständen (→

Spannungsteiler)



$$U_q = U_{R_i} + U_{R_1} + U_{R_2} + \ldots + U_{R_n} \qquad U_q = U_{R_i} + U_{R_{ersatz}} \quad \Rightarrow \quad U_{R_{Ersatz}} = U$$

$$U_{R_1} + U_{R_2} + \ldots + U_{R_n} = U_{R_{Ersatz}}$$

$$I \cdot (R_1 + R_2 + \cdots + R_n) = I \cdot R_{Ersatz}$$

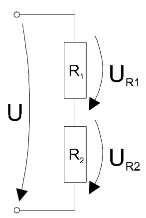
$$\Rightarrow \quad R_{Ersatz} = \sum_{\nu=1}^{\mu} R_\nu$$ <u>für Serien- / Reihenschaltung</u>

$$U_{R_1} = I \cdot R_1; \quad U_{R_2} = I \cdot R_2; \ldots \qquad \Rightarrow \quad \frac{U_{R_1}}{U_{R_2}} = \frac{R_1}{R_2}$$

Es gilt: Die einzelnen Teilspannungen verhalten sich bei in Reihe geschalteten Widerständen, wie die Werte der einzelnen Widerstände.

Spannungsteilung:

$$\frac{U_{R_2}}{U} = \frac{I \cdot R_2}{I(R_1 + R_2)}$$



1.2.3 Berechnungen im verzweigten Stromkreis

Zum ohmschen Gesetz werden noch die beiden Kirchhoffschen Gleichungen verwendet

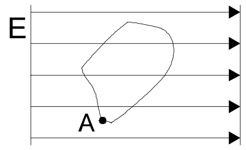
- **Knotenpunktsatz (1. Kirchhofsche Gleichung)**

$$\boxed{\sum I_{zu} = \sum I_{ab} \quad \Rightarrow \quad \sum I_{zu} - \sum I_{ab} = 0}$$

Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme

oder: Summe der vorzeichenbehafteten Ströme = 0 $\left(\oint \vec{S} \cdot d\vec{A} = 0\right)$

- **Maschensatz (2. Kirchhofsche Gleichung)**

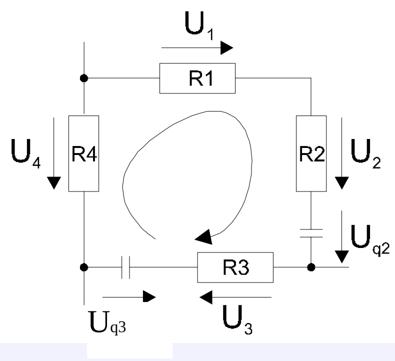


$$U = \frac{W}{Q} = E \cdot s \qquad W_{AA} = 0$$

$\boxed{\sum U_i = 0}$ über eine geschlossene Masche

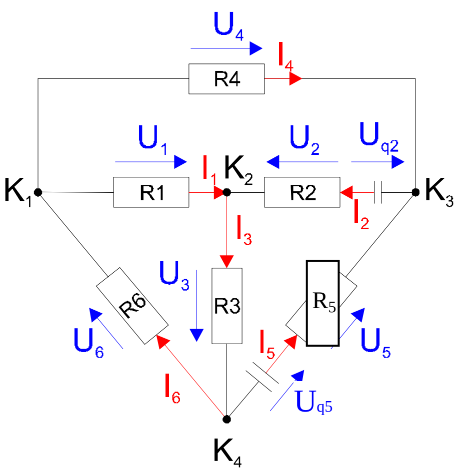
$$U_1 + U_2 + U_{q2} + U_3 - U_{q3} - U_4 = 0$$

Die Summe der vorzeichenbehafteten Spannungen in einer geschlossenen Masche = 0



1.2.3.1 Bestimmung der Zweigströme

Definition: Zweig - direkte (nicht weiter verzweigte) Verbindung zwischen zwei Knotenpunkten



- Anzahl der Zweige im Beispiel: z=6
- 6 unbekannte Zweigströme I_1 ... I_6
- Anzahl der Knoten: k=4

- **Richtungskonventionen**

  - aktive Spannungsquelle: Strom und Spannung entgegengesetzt
  - restliche Ströme können wahlfrei definiert / festgelegt werden
  - passive Komponenten (allgemein) zB.: Widerstände: Strom und Spannung gleichgerichtet

- **Ermittlung der Knotengleichungen**

$K_1: \quad I_6 - I_1 - I_4 = 0$

$K_2: \quad I_1 + I_2 - I_3 = 0$

$K_3: \quad I_4 + I_5 - I_2 = 0$

$K_4: \quad I_3 - I_5 - I_6 = 0$ (zufließend → positiv / abfließend → negativ)

$$K_1 + K_2 + K_3: \quad I_1 - I_1 + I_2 - I_2 \underline{- I_3} + I_4 - I_4 \underline{+ I_5 + I_6} = 0 \qquad \Rightarrow \quad -I_3 + I_5 + I_6 = 0$$

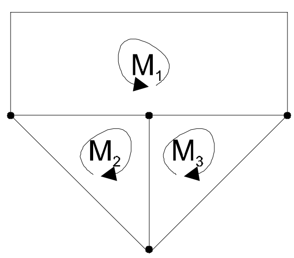
allgemein: k Knoten liefern (k-1) unabhängige Knotengleichungen

- Zur Berechnung der z Ströme sind weiter noch m {=z-(k-1)} Maschengleichungen erforderlich. Dabei ist jeder Zweig mindestens einmal zu berücksichtigen

$M_1: \quad U_1 - U_2 + U_{q_2} - U_4 = 0$

$M_1: \quad U_1 + U_3 + U_6 = 0$

$M_1: \quad -U_2 + U_{q_2} - U_5 + U_{q_5} - U_3 = 0$



	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	
K_1 :	$-I_1$	0	0	$-I_4$	0	I_6	0
K_2 :	I_1	I_2	$-I_3$	0	0	0	0
K_3 :	0	$-I_2$	0	I_4	I_5	0	0
M_1 :	R_1I_1	$-R_2I_2$	0	$-R_4I_4$	0	0	$-U_{q2}$
M_2 :	R_1I_1	0	R_3I_3	0	0	R_6I_6	0
M_3 :	0	$-R_2I_2$	$-R_3I_3$	0	$-R_5I_5$	0	$-U_{q2}-U_{q5}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ R_1 & -R_2 & 0 & -R_4 & 0 & 0 \\ R_1 & 0 & R_3 & 0 & 0 & R_6 \\ 0 & -R_2 & -R_3 & 0 & -R_5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -U_{q_2} \\ 0 \\ -U_{q_2} - U_{q_5} \end{pmatrix}$$

>> Ohmsches Gesetz: $R \cdot I = U \,\big|\, \cdot R^{-1}$

$\Rightarrow \quad I = U \cdot R^{-1}$

Lösungsmöglichkeiten

1. Möglichkeit: Bestimmung der inversen Matrix

$$R^{-1} \cdot R = E$$

2. Möglichkeit: „Cramersche Regel“

$$I_i = \frac{D_{I_i}}{D}$$

D_{I_i} ... Determinante der Widerstandsmatrix R_i, in der die i-te Spalte durch den Spannungsvektor ersetzt wurde

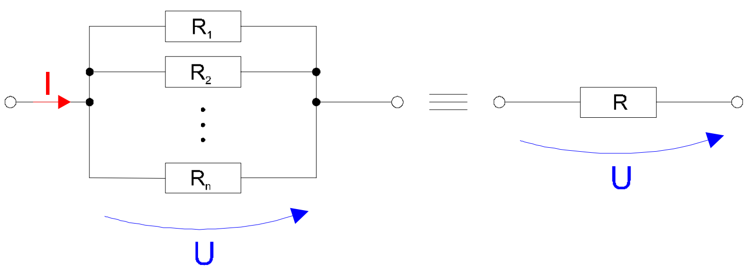
3. Möglichkeit: „Gauß-Jordan-Verfahren“

R-Matrix in Dreiecksmatrix umwandeln

1.4 Berechnung von Widerstandswerten

- Serienschaltung: $\boxed{\Rightarrow \quad R = \sum_{k=1}^{n} R_k}$

- Parallelschaltung:



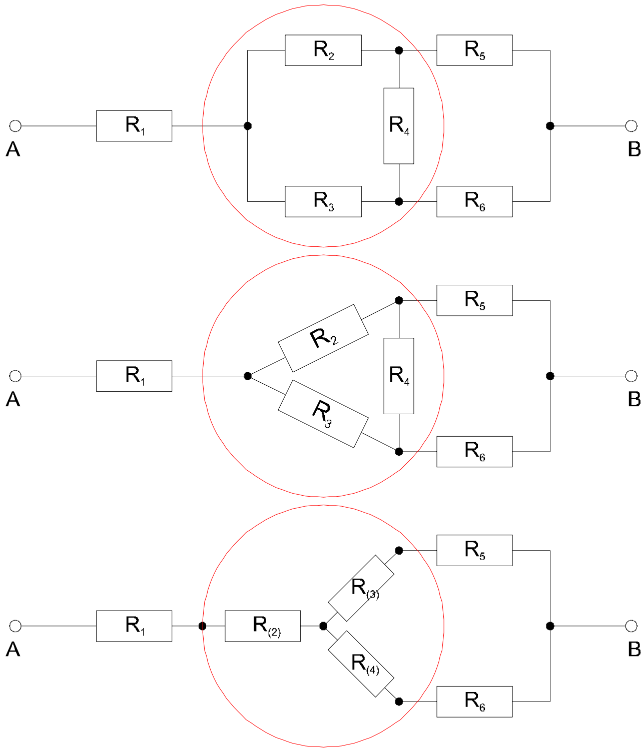
$$I = I_1 + I_2 + \cdots + I_n \quad = \quad \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \cdots + \frac{U}{R_n} = \frac{U}{R}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \frac{1}{R} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{R_k}}$$

z.B.: $R_1 \| R_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad \Rightarrow \quad R = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$

Stern- / Dreieckschaltung

Bsp.: ges: R_{AB}



$$\Rightarrow \quad R_{AB} = R_1 + R_2 + (R_3 + R_5) \| (R_4 + R_6)$$

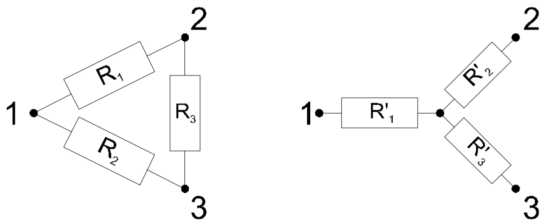
Stern- bzw. Dreieckschaltung zeigen dann gleiches elektrotechnisches Verhalten, wenn die Widerstände zwischen den Klemmen identisch sind.

$$R_{12} = R_1' + R_2' = R_1 \| (R_2 + R_3)$$

$$R_{13} = R_1' + R_3' = R_2 \| (R_1 + R_3)$$

$$R_{23} = R_2' + R_3' = R_3 \| (R_1 + R_2)$$

$$= \frac{R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{R_3 + R_1 + R_2}$$



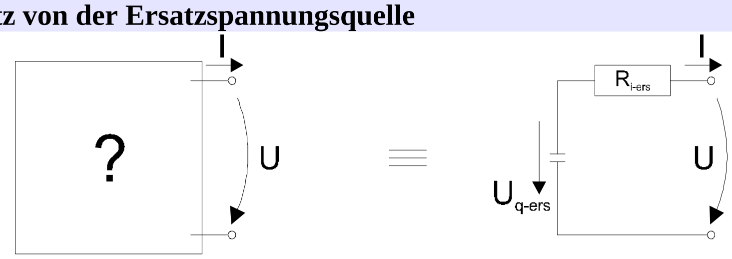
allgemein: Sternwiderstand = Produkt der anliegenden Dreieckswiderstände (Δ-R) geteilt durch die Summe aller Δ-R

z.B.: $R_2' = \dfrac{R_1 \cdot R_3}{R_1 + R_2 + R_3}$

Dreieckswiderstand = Summe aller zweigliedrigen Produkte der Dreieckswiderstände geteilt durch die gegenüberliegenden Dreieckswiderstände

z.B.: $R_1 = \dfrac{R_{11}R_{21} + R_{11}R_{31} + R_{21} + R_{31}}{R_{31}}$

1.5 Satz von der Ersatzspannungsquelle



(Zweipolquelle)

Jedes aktive Netzwerk läßt sich bezüglich zweier Anschlußklemmen (Zweipolquelle) durch eine einfache Ersatzspannungsquelle mit Ersatzinnenwiderstand darstellen.

- **Zur Bestimmung von $R_{i\text{-}ers}$** alle Spannungsquellen „kurzschließen“ und den Ersatzwiderstand des verbleibenden Widerstandsnetzwerks bestimmen.
- **Bestimmung von $U_{q\text{-}ers}$** unter Leerlaufbedingung (I_3=0) bezüglich der Anschlussklemmen am Originalnetzwerk

1.6 Leistung, Arbeit (Energie)

$$W = F \cdot s \quad (\vec{F} \cdot \vec{s})\,; \quad F = Q \cdot E$$
$$W = Q \cdot E \cdot s\,; \quad U = E \cdot s$$
$$W = Q \cdot U\,; \quad mit\ I = \frac{Q}{t} \Rightarrow Q = I \cdot t$$
$$W = U \cdot I \cdot t$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad P = \frac{W}{t} = U \cdot I\,; \quad [W] \quad Watt} \qquad 1W = 1V \cdot A$$

mit Widerstand R:

$$R = \frac{U}{I} \qquad \rightarrow \quad U = R \cdot I \qquad \rightarrow \quad I = \frac{U}{R}$$

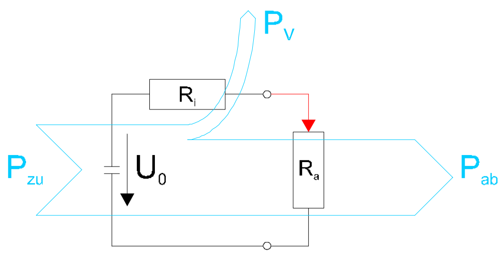
$$\boxed{\Rightarrow \quad P = I^2 \cdot R} \qquad \boxed{\Rightarrow \quad P = \frac{U^2}{R}}$$

1.7 Wirkungsgrad

$$P_{zu} = P_{ab} + P_V \quad \rightarrow \quad P_V = P_{zu} - P_{ab}$$

$$\boxed{\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}} \quad (\cdot 100\%)} = \frac{P_{ab}}{P_{ab} + P_V} = 1 - \frac{P_V}{P_{zu}}$$

Beispiel:



$$P_{ab} = U \cdot I = I^2 \cdot R_a = \frac{U^2}{R_a}$$

$$P_{zu} = I^2 \cdot R_{ges} = I^2 (R_i + R_a)$$

$$\Rightarrow \quad \eta = \frac{R_a}{R_i + R_a} \quad \begin{vmatrix} \approx 1 & für\ R_i = 0\,;\ R_a \rightarrow \infty \\ \approx 0 & für\ R_a = 0\,;\ R_i \rightarrow \infty \end{vmatrix}$$

Maximum bestimmen:

$$P_{a_{max}} = I^2 \cdot R_a\,; \qquad I = \frac{U_0}{R_i + R_a} \quad \Rightarrow \quad P_a = \frac{U_0^2 \cdot R_a}{(R_i + R_a)^2}$$

$$P_a = \text{max},\ wenn\ \frac{dP_a}{dR_a} = 0 \quad \ldots \quad \Rightarrow \quad R_i = R_a$$

$$\boxed{P_{a_{max}} = \eta \cdot P_{zu}\,; \eta = 0{,}5}$$ Anpassung

2. Elektrostatik

2.1 Elektrisches Feld

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$$

- gleichnamige Ladungen stoßen sich ab (und umgekehrt)

- $U = \frac{W}{Q} = \frac{\vec{F} \cdot \vec{s}}{Q} = \frac{Q \cdot \vec{E} \cdot \vec{s}}{Q} = \vec{E} \cdot \vec{s}$

- Potential $U = \varphi_1 - \varphi_2$ Potenialdifferenz

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \vec{E} \cdot \vec{s} = \int_s dE \cdot ds \quad mit\ Bezugspotential\ \varphi_1 = 0$$

$$-\varphi = \int dE \cdot ds \quad \Rightarrow \quad E = -\frac{d\varphi}{ds}$$

2.2 Elektrische Felder an Leiteroberflächen

$F = Q \cdot E$, gleichnamige Ladungen stoßen sich ab

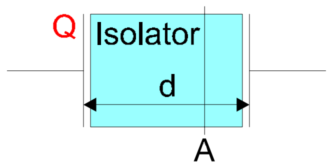
- Kräfte parallel zur Leiteroberfläche kompensieren sich gegenseitig
- resultierenden E-Feld tritt seitlich aus

2.3 „Ohmsches Gesetz“ der Elektrostatik

Kenngröße: U Spannung (Potentialdifferenz)
Q Ladung (als Ersatz für I)

$$\boxed{\Rightarrow \quad R_E = \frac{U}{Q}} \qquad \left(\rightarrow C = \frac{Q}{U}\right)$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad R_E = \frac{d}{\varepsilon \cdot A}} \qquad \left(\rightarrow C = \varepsilon \frac{A}{d}\right)$$



materialspezifische Kenngröße:
„elektrostatischer Leitwert“ = Dielektrizitätskonstante

$\varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r$ $\quad \varepsilon_0$ ... Dielektrizitätskonstante im Vakuum (für Leiter)

$$\varepsilon_0 = 8{,}854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m} \quad \left[\frac{As}{Vm}\right]$$

ε_r ... relative Dielektrizitätskonstante

z.B.: $\varepsilon_{r-Vak} = 1$; $\varepsilon_{r-Papier} = 4$; $\varepsilon_{r-H_2O} \cong 80$

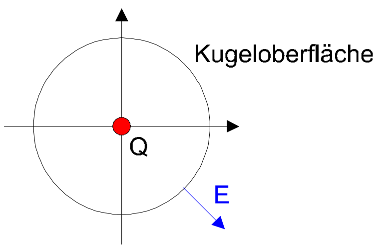
mit $R_E = \frac{U}{Q} = \frac{d}{\varepsilon \cdot A}$ und $U = E \cdot d$ $\quad \rightarrow \quad \frac{E \cdot d}{Q} = \frac{d}{\varepsilon \cdot A}$

$$\boxed{\Rightarrow \quad E = \frac{Q}{\varepsilon \cdot A}}$$

2.4 Feld einer Punktladung

$$\boxed{\Rightarrow \quad E = \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot 4\pi r^2}}$$

Richtung von E radial



2.4.1 Feldüberlagerungen

geg: $\vec{E}_1 ; \vec{E}_2 ; \ldots ; \vec{E}_i$
Bestimmen des elektrischen Feldes mit Vektoraddition

2.4.2 Feld einer Raumladung

ρ : Raumladungsdichte

$$\rightarrow \quad Q = \int_V \rho \cdot dV$$

$$dE = \frac{dQ}{\varepsilon_0 \cdot 4\pi r^2}$$

$$\boxed{\rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \int_V \frac{\rho}{r^2} dV}$$

2.5 Potential einer Punktladung

$\boxed{\varphi = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}}$ mit mehreren Potentialen φ_i : $\boxed{\varphi_{res} = \sum \varphi_i}$ skalare Größen

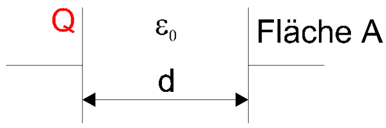
2.6 Ladungsdichte D / Verschiebungsdichte

$D = \frac{Q}{A} \left[\frac{As}{m^2}\right]$ $\boxed{\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}}$

2.6.1 Ladungsverschiebung D im Dielektrikum

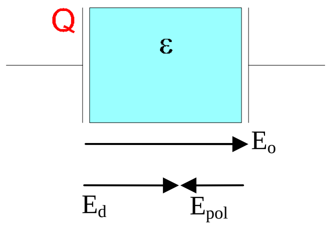
- Vakuum, ε_0 : keine Ladungsverschiebung, da materiefrei
  - resultierendes Feld E

$$E_0 = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot A} \quad \left(= \frac{U}{d} \right)$$



- Dielektrikum, $\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r = \varepsilon$

  im Isolator tritt Polarisation auf (keine Ladungsbewegung!), dh. „Verbiegung der Moleküle“ (Dipol)
  - Polarisationsfeld: E_{pol}
  - resultierendes Feld im Dielektrikum



$$E_d = E_0 - E_{pol} \quad mit\ E_0 = \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot A}$$

$$E_d = \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot A}$$

$$\frac{E_d}{E_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot A} \div \frac{Q}{\varepsilon_0 \cdot A} = \frac{1}{\varepsilon_r}$$

$$E_d = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot E_0$$

$$E_{pol} = E_0 - E_d \quad = E_0 - \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot E_0 \quad = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right) \cdot E_0$$

maximale Feldstärke tritt im Vakuum auf E_0

Feldstärke im Isolator immer kleiner als im Vakuum (wegen Polarisation E_{pol})

$$\boxed{E_d = E_0 - E_{pol}} \qquad \rightarrow \quad E_{pol} = E_0 - E_d$$

$$mit\ E_d = \frac{1}{\varepsilon_r} \cdot E_0 \quad \rightarrow \quad E_0 = \varepsilon_r \cdot E_d$$

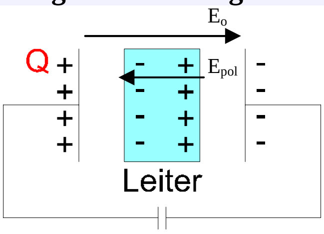
$$\Rightarrow \quad E_{pol} = \varepsilon_r \cdot E_d - E_d = E_d\left(\varepsilon_r - 1\right)$$

$(\varepsilon_r - 1)$ elektr. Suszeptibilität

je größer ε_r desto größer E_{pol}

>> resultierendes Feld wird durch Polarisationsfeld geschwächt (im Vakuum E_{pol} =0)

2.6.2 Ladungsverschiebung im Leiter D_L / Influenz



an der Leiteroberfläche treten Kompensationsladungen auf (Ladungsbewegung möglich!), die der felderzeugenden Ladung gleich sind

$$\Rightarrow \quad D = D_L = \frac{Q}{A} = \varepsilon \cdot E$$

$\Rightarrow \quad E_0 = E_{pol} \quad \Rightarrow$ resultierendes Feld im Leiter ist Null (Faraday´scher Käfig $\Rightarrow \varepsilon_L = \varepsilon_0$)

$D = D_L$; $D = \varepsilon_0 \cdot E_0$

$$\Rightarrow \quad D_L = \varepsilon_0 \cdot E_{pol}$$

2.7 Gaußsches Gesetz

$$\boxed{Q = \int_V \rho \cdot dV = \varepsilon \int_A E \cdot dA}$$

ρ ... Raumladungsdichte

2.8 Kapazität, Kondensator

- <u>Plattenkondensator</u>

$D = konst.$ (Ladungs- / Verschiebungsdichte)

$$Q = \left(\int D \cdot dA\right) = D \cdot A = \varepsilon \cdot E \cdot A; \quad \varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \quad mit\ U = E \cdot d$$

$$\rightarrow \quad Q = \varepsilon \cdot \frac{U}{d} \cdot A \quad mit \quad \boxed{C = \varepsilon \cdot \frac{A}{d} \quad [F]}$$

$$\Rightarrow \quad Q = U \cdot C$$

$$\boxed{\rightarrow \quad C = \frac{Q}{U}}$$

$mit\ R_e = \frac{Q}{U}$ ... elektrostatischer Widerstand

$$\boxed{\rightarrow \quad C = \frac{1}{R_e}}$$

2.8.1 Verschaltung von Kondensatoren

- <u>Parallelschaltung</u>

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n \ ; \quad Q = C \cdot U$$

$$C_{ges} \cdot U = C_1 \cdot U + C_2 \cdot U + \cdots + C_n \cdot U$$

Gesamtkapazität = Summe der Einzelkapazitäten

$$\boxed{\Rightarrow \quad C_{ges} = \sum C_i}$$

- <u>Serienschaltung</u>

$$U = U_1 + U_2 + \cdots + U_n$$

$Q = Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_n$ (Influenz, Leiter im elektrischen Feld)

Ausnahme: Kondensatoren getrennt aufladen und dann zusammenschalten

$$\frac{Q}{C_{ges}} = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \cdots + \frac{Q_n}{C_n}$$

$$C_{ges} = \frac{C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots \cdot C_n}{C_1 + C_2 + \cdots + C_n}$$

$$\boxed{\Rightarrow \quad \frac{1}{C_{ges}} = \sum \frac{1}{C_i}}$$

2.9 Energie im Kondensator

$$C = \frac{Q}{U} \quad \rightarrow \quad dQ = C \cdot dU \quad mit\ i = \frac{dQ}{dt} \quad \rightarrow \quad dQ = i\,dt \quad \rightarrow \quad i\,dt = C\,dU \quad \boxed{\rightarrow \quad i = C\frac{dU}{dt}}$$

$dQ = i\,dt$ jede Spannungsänderung erfordert einen Strom

elektrische Energie: $W = U \cdot I \cdot C$ $\boxed{W = C \cdot \frac{U_C^2}{2}}$

3. Elektromagnetismus

3.1 Grundlagen

Raum mit bewegten Ladungsträgern, in dem Kraftwirkungen auftreten, heißt magnetisches Feld. (wegen Kraftwirkung → Feldrichtung {Feldlinien})

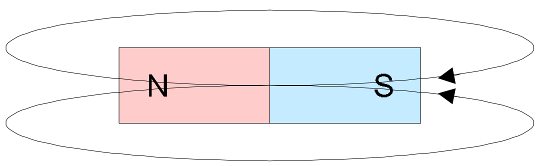
$$\vec{F} = Q \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = \ell \cdot (\vec{I} \times \vec{B})$$

Beobachtungen:
Feldlinien versuchen sich zu verkürzen → Kraftwirkung F

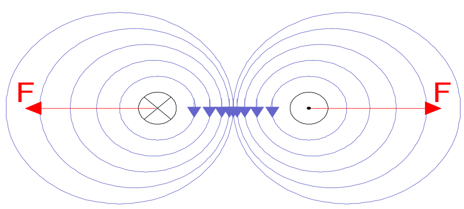
- Anziehung bei ungleichnamigen Polen
- Abstoßung bei gleichnamigen Polen

Zwischen den Feldlinien treten Abstoßungskräfte auf
→ Feldlinien kreuzen sich nicht
→ magnetische Feldlinien treten an ferromagnetischen und nichtferromagnetischen Materialien senkrecht aus bzw. ein.

- magnetische Feldlinien sind in sich geschlossen → kein Anfang, kein Ende



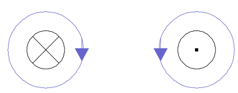
- magnetisches Feld zwischen stromführenden Leitern



Kraftwirkung von hoher zu niedriger Feldliniendichte
→ Abstoßung bei gegenseitig stromdurchflossenen Leitern und umgekehrt

<u>Richtungskonvention:</u>

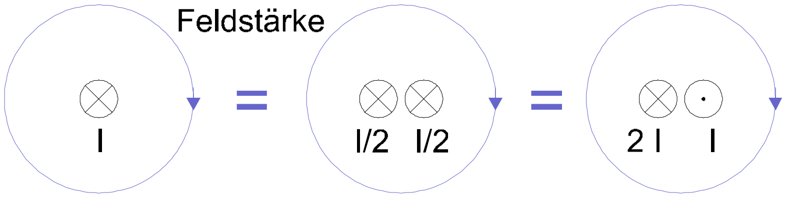
- stromführende Leiter: „rechte Hand - Regel“
- 3-Finger-Regel (Ursache - Vermittlung - Wirkung)



- Permanentmagnet (Basis für Richtungskonvention) - Ausrichtung eines Elementarmagneten von NORD nach SÜD

3.2 magnetische Grundgrößen

Experiment:



Feldstärke: $\sim \sum I$

- Durchflutung: $\theta = \sum I \quad [A]$ (magnetischer Strom, I)
- magnetischer Fluß: $\phi = \dfrac{\theta}{R_m}$ (magnetische Spannung, U)
- Magnetischer Widerstand: $R_m = \dfrac{l}{\mu A}$

$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ (Permeabilität) - Maß für Leitfähigkeit mag. Feldlinien

μ_0 ... absolute Permeabilität
(nichtferromagnetische Materialien)

$$\mu_0 = 0{,}4\pi \cdot 10^{-6} \quad \left[\frac{H}{m}; \frac{Vs}{Am}\right]$$

μ_r ... relative Permeabilität
(materialabhängig)

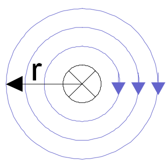
3.3 abgeleitete magnetische Größen

- magnetische Flußdichte / magnetische Induktion $B = \dfrac{\phi}{A} \quad \left[\dfrac{Vs}{m^2}; T\right]$ Tesla

$\rightarrow \quad \phi = \vec{B} \circ \vec{A} \quad = B \cdot A \cdot \cos\varphi$

- magnetische Feldstärke:

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$



dh. die Feldstärke ist umgekehrt proportional zur Länge der Feldlinie

allgemein gilt: $H = \dfrac{\theta}{\ell} = \dfrac{\theta}{2\pi r}$

$$B = \frac{\phi}{A} \quad mit\ \phi = \frac{\theta}{R_m} \quad \rightarrow \quad B = \frac{\theta}{R_m A} \quad mit\ R_m = \frac{l}{\mu A} \quad \rightarrow \quad B = \frac{\theta \mu A}{l A}$$

$$\Rightarrow \quad B = \mu \cdot \frac{\theta}{l} \quad = \mu \cdot H \quad \left(\mu_0 = \frac{B}{H}; \quad \mu = \frac{dB}{dH}\right)$$

für das Feld außerhalb eines geraden stromdurchflossenen Leiters gilt:

$$H = \frac{i}{2\pi r}$$

für das Feld im inneren einer langen stromdurchflossenen Spule gilt:

$$H = \frac{N \cdot I}{l}$$

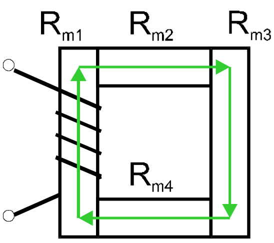
Durchflutungsgesetz (1. Maxwell-Gleichung)

$$\theta = H \int dl = I \int \frac{1}{\pi r^2} dA \underset{\text{einfache Geometrie}}{=} H \cdot \ell = N \cdot I$$

3.4 Berechnungen im magnetischen Kreis

Begriff: „magnetischer Spannungsabfall“

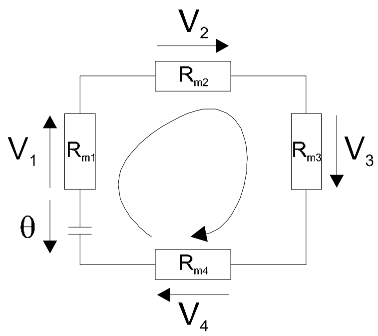
Bsp.: einfacher magnetischer Kreis



$$\phi = \frac{\theta}{R_{m_{ges}}} \quad mit\ \theta = I \cdot N \quad \rightarrow \quad \phi = \frac{I \cdot N}{R_{m_{ges}}}$$

$$R_{m_{ges}} = \sum R_{m_i} \ ; \quad R_{m_i} = \frac{l_i}{\mu_i \cdot A_i}$$

Ersatzschaltbild:



V_i ... magnetische Spannungsabfälle

$$\sum V_i = 0 \, ; \quad V_i = \phi \cdot R_{m_i} \quad mit \quad R_{m_i} = \frac{l_i}{\mu_i \cdot A_i}$$

3.5 Induktionsgesetz

$$U_{q_{ind}} = \frac{d\phi}{dt}$$

Richtungskonvention

$\frac{d\phi}{dt} > 0$ i entgegengesetzt zum Primärstrom I

$\frac{d\phi}{dt} < 0$ i gleiche Richtung wie Primärstrom I

also gilt: $\frac{d\phi}{dt} = 0 \quad \Rightarrow i = 0 \qquad i \sim -\frac{d\phi}{dt}$

Lenz´sche Regel

ein Induktionsstrom erzeugt ein Magnetfeld, das dem ursächlichen Feld entgegenwirkt (→ schwächt)

allgemein: $U_{q_{ind}} = l \cdot \left(\vec{B} \times \vec{v}\right)$

$U_{q_{ind}} = l \cdot B \cdot v \cdot \sin\varphi_{B,v}$ (Richtung von $U_{q_{ind}}$ mit 3-Finger-Regel der rechten Hand)

$U_{q_{ind}} = N \cdot \frac{d\phi}{dt}$ (N ... Windungszahl der Sekundärspule)

$$d\phi = \vec{B} \cdot d\vec{A} = B \cdot dA \cdot \cos\varphi ; \quad \varphi = \omega t$$

$$\phi = B \cdot A \cdot \cos\omega t = B \cdot l \cdot b \cdot \cos\omega t$$

$$\frac{d\phi}{dt} = -B \cdot l \cdot b \cdot \omega \cdot \sin\omega t = U_{q_{ind}}$$

$$U_{q_{ind}} = -B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin\omega t$$

3.6 Kräfte im Magnetfeld

- Kraft auf stromführenden Leiter (Lorenzkraft)

  $\vec{F} = l(\vec{I} \times \vec{B})$ z.B.: Motor

- Kraft auf bewegten Leiter: mit $I = \frac{Q}{t}$

  $\vec{F} = Q(\vec{v} \times \vec{B})$ z.B.: Motor, Drehspule

- Kräfte zwischen stromführenden Leitern: mit $\vec{F} = l(\vec{I} \times \vec{B})$

  $$F_{1/2} = l \cdot I_1 \cdot B_2 \quad mit\ B_2 = \mu_0 \cdot H_2 \quad und\ H_2 = \frac{I_2}{2\pi r}$$

  $F_{1/2} = l \cdot I_1 \cdot \mu_0 \frac{I_2}{2\pi r}$; l ... Länge der parallel geführten Leiter

3.7 Induktivität L (Selbstinduktivität)

→ Induktionswirkung tritt auch in der Primärspule auf!

$$L = \frac{N^2}{R_m} = \frac{N^2 \cdot \mu_0 \cdot \mu_r \cdot A}{l}$$

$L = \frac{N^2}{l} \cdot \mu_0 \cdot A$ ... gilt nur für Spulen ohne Kern

- für Spulen mit ferromagnetischem Kern (→Magnetisierungskennlinien)

  $$L = \frac{N^2 \cdot A}{l} \cdot \frac{dB}{dH}; \quad B = \mu_0 \cdot H$$

- Reihenschaltung von Induktivitäten

  $$i = i_1 = i_2 = \ldots = i_n; \quad U = U_1 + U_2 + \ldots + U_n$$

  $$allgemein: \Rightarrow \quad L_{ers} = \sum_n L_n$$

- Parallelschaltung

  $$i = i_1 + i_2 + \ldots + i_n; \quad U = U_1 = U_2 = \ldots = U_n$$

  $$allgemein: \Rightarrow \quad \frac{1}{L_{ers}} = \sum_n \frac{1}{L_n}$$

$$U_{q_{ind}} = L \cdot \frac{di}{dt}$$

3.8 Energie des Magnetfeldes

$$W = \frac{1}{2} L \cdot i^2 \quad mit\ L = \frac{N^2}{R_m} = \frac{N^2 A \mu_0}{l}$$

$$\Rightarrow \quad W = \frac{i^2 N^2 A \mu_0}{2l}$$

$$W = \frac{A \cdot l}{2\mu_0} \cdot B^2$$

Kraftwirkung im magnetischen Kreis:

$F = \frac{A \cdot B^2}{2\mu_0} (\cdot P)$ P ... Anzahl der Pole

3.9 Transformator

Es gilt: $\left.\begin{array}{l} U_1 = N_1 \cdot \dfrac{d\phi_1}{dt} \\ U_2 = N_2 \cdot \dfrac{d\phi_2}{dt} \end{array}\right\} \dfrac{d\phi_1}{dt} = \dfrac{d\phi_2}{dt} = \dfrac{d\phi}{dt}$ (vollständige magnetische Kopplung)

$$\Rightarrow \quad \frac{U_1}{N_1} = \frac{U_2}{N_2} \Rightarrow \frac{U_1}{U_2} = \frac{N_1}{N_2} = \ddot{u}$$ (Übersetzungsverhältnis)

Idealisiert:

$$P_1 = U_1 \cdot i_1 \quad = \quad P_2 = U_2 \cdot i_2$$

$$\Rightarrow \quad \frac{i_1}{i_2} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{\ddot{u}}$$

Widerstandstransformation:

$$(R_1 =)\, Z_1 = \frac{U_1}{i_1} \quad ; \quad (R_2 =)\, Z_2 = \frac{U_2}{i_2}$$

$$\left.\begin{array}{l} U_1 = \ddot{u} \cdot U_2 \\ i_1 = \dfrac{1}{\ddot{u}} \cdot i_2 \end{array}\right\} Z_1 = \frac{\ddot{u} \cdot U}{1/\ddot{u} \cdot i_2} = \ddot{u}^2 \cdot Z_2$$

4. Wechelstromlehre

$$U_{q_{ind}} = N \cdot B \cdot A \cdot \omega \cdot \sin(\omega t)\,; \quad \omega = \frac{\varphi}{t}$$

$$u(t) = \hat{u} \sin \omega t$$

$\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 2\pi f \quad \left[\dfrac{1}{s}\right]$ T ... Periodendauer $\qquad f = \dfrac{1}{T} \quad [Hz]$ ... Frequenz

für Kapazität: $i = C\dfrac{du}{dt} \quad mit\ u(t) = \hat{u}\sin\omega t$

$$\frac{du}{dt} = \hat{u} \sin \omega t$$

$$i(t) = C \cdot \hat{u}\omega \cos \omega t$$

$$i(t) = \hat{I} \cos \omega t = \hat{I} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Komplexe Rechnung

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin \omega t \quad \rightarrow \quad \underline{u} = u\, e^{j\omega t}$$

$$\underline{u} = u\, e^{j\omega t} = \hat{u}(\cos \omega t + j \sin \omega t) \quad u = \sqrt{\mathrm{Re}^2 + \mathrm{Im}^2} \quad \omega t = \varphi = \arctan \frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}}$$

$$\frac{d\underline{u}}{dt} = u\, e^{j\omega t} \cdot j\omega$$

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$$

Impedanz („Widerstand“)

- für Kapazität: $\underline{z} = \dfrac{1}{j\omega C}$

$$\underline{z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{u\, e^{j\omega t}}{i\, e^{j\omega t + \frac{\pi}{2}}} = \frac{u}{\omega C u}\, e^{j\left(\omega t - \left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)\right)} = \frac{1}{\omega C}\, e^{-j\frac{\pi}{2}}$$

Strom eilt der Spannung voraus

- für Induktivität: $\underline{z} = j\omega L$

$$\underline{z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{u\, e^{j\omega t}}{i\, e^{j\omega t - \frac{\pi}{2}}} = \frac{u\omega L}{u}\, e^{j\left(\omega t - \left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right)} = \omega L\, e^{j\frac{\pi}{2}}$$

Spannung eilt dem Strom voraus

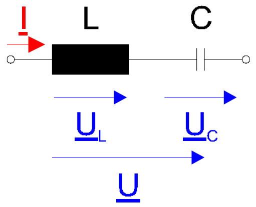
- für Widerstand: $\underline{z} = R$

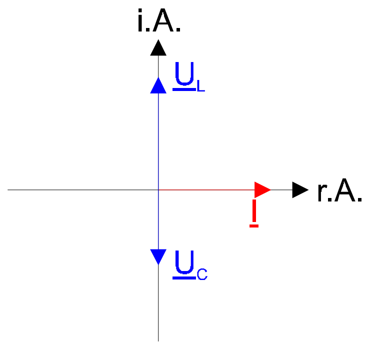
$$\underline{z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{u\, e^{j\omega t}}{i\, e^{j\omega t}} = \frac{u}{i}\, e^{j0} = R\, e^{j0}$$

keine Phasenverschiebung

4.1 Verschaltung von 2 Elementen

Serie: L, C





$$\underline{U} = \underline{U}_L + \underline{U}_C$$

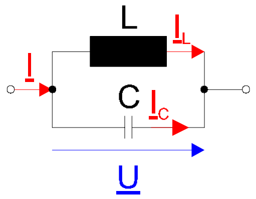
Resonanzfall: $\underline{U} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{U}_L = \underline{U}_C$

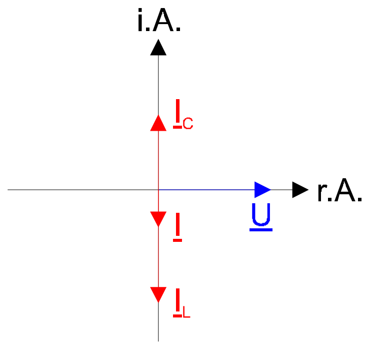
$$\Rightarrow \quad \underline{z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 0$$

Resonanzfrequenz: $\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

Winkelgeschwindigkeit: $\omega = 2\pi f$

Parallel: L, C



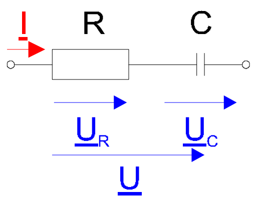


$$\underline{I} = \underline{I}_L + \underline{I}_C$$

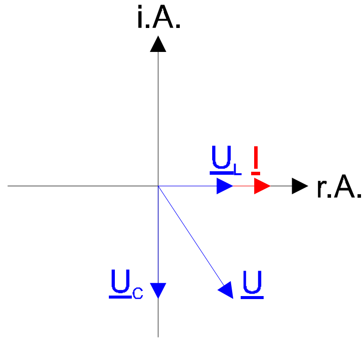
Resonanzfall: $\underline{I} = 0 \quad \rightarrow \quad \underline{I}_L = \underline{I}_C$

$$\Rightarrow \quad \underline{z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} \rightarrow \infty$$

komplexer Leitwert: $\frac{1}{\underline{z}} = \underline{Y} = \frac{1}{j\omega L} + j\omega C = j\left(-\frac{1}{\omega L} + \omega C\right) = 0$



Serie: R, C



$$\underline{z} = R + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(-\frac{1}{\omega C}\right) = Z\, e^{j\varphi_z}$$

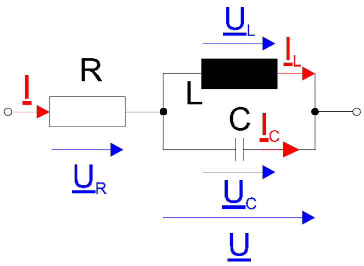
$$\text{Betrag: } Z = \sqrt{R^2 + \left(-\frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

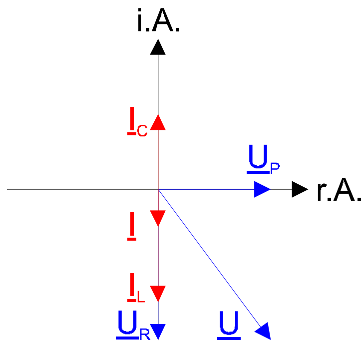
Winkel:

$$\varphi_Z = \arctan\frac{\mathrm{Im}}{\mathrm{Re}} = \arctan\frac{-1/\omega C}{R}$$

negativer Winkel bei kapazitiven Verhalten

4.2 Verschaltung von 3 Elementen





$$\underline{Z} = R + \underline{Z}_p$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_p} = \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{1/j\omega C} = \frac{j\omega L \cdot 1/j\omega C}{j\omega L + 1/j\omega C} = \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC}$$

$$\underline{Z} = R + j\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC}$$

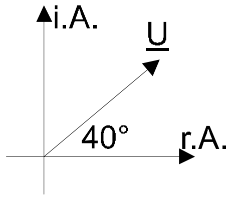
$$\underline{Z} = Z\, e^{j\varphi_Z} \quad ; \quad \underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$

4.3 Netzwerke

geg: $\underline{U} = 220\, e^{j(\omega t + 40°)}$ $\quad R = 1\Omega$

$f = 50Hz$ $\quad L = 6{,}37 mH$

$\omega = 2\pi f$ $\quad C = 1592 \mu F$

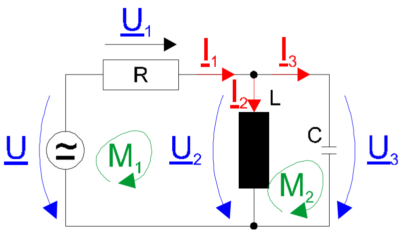


ges: $\underline{U}_3$

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}; X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$\underline{Z}_L = j\omega L \quad ; \quad X_L = \omega L$$

$$X_C = \frac{1}{2\pi 50Hz \cdot 1592\mu F} = \underline{\underline{2\Omega}} \qquad X_L = 2\pi 50Hz \cdot 6{,}37mH = \underline{\underline{2\Omega}}$$



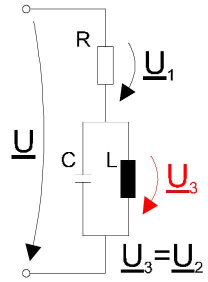
Netzwerkanalyse

- Anzahl der Zweige z = 3
- Anzahl der Knoten k = 2 $\quad\rightarrow\quad$ (k-1) Knotengleichungen

$\rightarrow\quad$ m = z-(k-1) Maschengleichungen

$$K_1: \quad I_1 - I_2 - I_3 = 0$$
$$M_1: \quad R_1 I_1 + j\omega L\, I_2 = \underline{U}$$
$$M_2: \quad -j\omega L\, I_2 + \frac{1}{j\omega C} I_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & j\omega L & 0 \\ 0 & -j\omega L & \dfrac{1}{j\omega C} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \underline{U} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{Z} \cdot \underline{I} = \underline{U}_q$$



Lösung zur Bestimmung der Zweigströme

1. Lösungsweg: Gauß-Jordan-Verfahren (Dreiecksmatrix)
2. Lösungsweg: Spannungsteilerprinzip

$$\frac{\underline{U}_3}{\underline{U}} = \frac{\underline{Z}_P}{\underline{R} + \underline{Z}_P} \quad \rightarrow \quad \underline{U}_3 = \underline{U} \cdot \frac{\underline{Z}_P}{\underline{R} + \underline{Z}_P}; \quad \underline{Z}_P = \frac{j\omega L}{1 - \omega^2 LC}$$

$$\underline{U}_3 = \underline{U} \cdot \frac{j \dfrac{\omega L}{1-\omega^2 LC}}{R + j\dfrac{\omega L}{1-\omega^2 LC}} \qquad \left(\mathrm{Re} + j\,\mathrm{Im} \quad \rightarrow \quad \underline{K} = K\, e^{j\varphi_K}\right)$$

$$\underline{U}_3 = \underline{U} \cdot \frac{\underline{Z}}{\underline{N}} = \frac{Z\, e^{j\varphi_Z}}{N\, e^{j\varphi_N}} = \frac{Z}{N} e^{j(\varphi_Z - \varphi_K)}$$

$$\underline{Z}_P = \frac{j\omega L}{1-\omega^2 LC} = \frac{j\,2}{1 - 2 \cdot 0{,}5} \quad \rightarrow \quad j\,\infty \quad \rightarrow \qquad \text{Resonanzfall} \quad \Rightarrow \quad \underline{U}_3 = \underline{U}_q$$

4.4 Leistungsberechnung

Leistung: $P_- = U_- \cdot I_- \quad = \quad P_\sim = U_{eff} \cdot I_{eff}$

(Gleichstrom) (Wechselstrom)

Momentanwert: $p(t) = u(t) \cdot i(t) = \hat{U} \sin\left(\omega t + \varphi_U\right) \cdot \hat{I} \sin\left(\omega t + \varphi_I\right)$

$$p(t) = \hat{U} \cdot \hat{I} \cdot \frac{1}{2}\left[\cos\left(\varphi_U - \varphi_I\right) - \cos\left(2\omega t + \varphi_U + \varphi_I\right)\right]$$

$$p(t) = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}\left[\cos\left(\varphi_U - \varphi_I\right) - \cos\left(2\omega t + \varphi_U + \varphi_I\right)\right]$$

Wirkleistung: $P = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \cos\varphi \quad mit \quad U_{eff} = \dfrac{\hat{U}}{\sqrt{2}} \quad und \quad I_{eff} = \dfrac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$

Blindleistung: $Q = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \sin\varphi$

Scheinleistung: (mathematische Größe) $S = U_{eff} \cdot I_{eff}$

$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^*$ S ... komplexe Scheinleistung

U ... komplexe Spannung

I* ... konjugiert komplexe Stromstärke $\underline{I} = I\, e^{-j\varphi_I}$

$$\underline{S} = U_{eff} \cdot I_{eff} \cdot \left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right)$$

$$\underline{S} = P + jQ$$

5. Digitaltechnik

Im Gegensatz zur Analogtechnik treten bei digitalen Signalen nur 2 Signalzustände auf.
- niedriger Spannungspegel (in der Regel 0V) : L (low), 0
- hoher Spannungspegel (bspw. 5V, 24V): H (high), 1

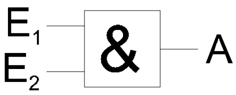
logische Signale, die nur 2 Zustände aufweisen, heißen Bit (binary digit)

Kombination von mehreren digitalen Signalen zur Darstellung von Werten (z.B.: Spannungen)

Standards: 8 Bit → 1 Byte ; 16 Bit → Word

logische Grundverknüpfungen

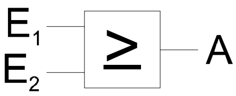
UND-Verknüpfung



$A = E_1 \wedge E_2$

E_2	E_1	A
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

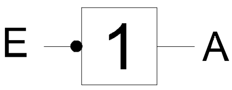
ODER-Verknüpfung



$A = E_1 \vee E_2$

E_2	E_1	A
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

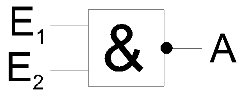
NOT / Negation



$A = \overline{E}$

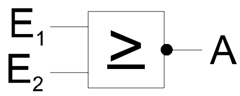
E	A
0	1
1	0

- **NICHT-UND / NAND**



$A = \overline{E_1 \wedge E_2}$

- **NICHT-ODER / NOR**



$A = \overline{E_1 \vee E_2}$

- **Antivalenz / XOR**

E_2	E_1	A
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

<u>Abgeleitete Funktionen</u>:
In der Digitaltechnik treten Aufgabenstellungen aus der Kombinatorik, Informationsverarbeitung auf, die zu Schaltfunktionen A=f(E_1 ... E_2) führen. Diese sind auf den kürzesten Schaltausdruck zu reduzieren.

Minimierung von Schaltfunktionen (SF)

-Schaltalgebra
- Reduktion mit Karnaugh-Diagramm (KV-Diagramm)

Reduktionsregeln zur Schaltalgebra

- eine Variable

$E \vee 1 = 1 \qquad E \vee E = E$

$E \vee 0 = E \qquad E \vee \overline{E} = 1$

$E \wedge 1 = E \qquad E \wedge E = E$

$E \wedge 0 = 0 \qquad E \wedge \overline{E} = 0$

- für mehrere Variable
  - Kommutativgesetz (Vertauschungsgesetz)

    $E_1 \wedge E_2 = E_2 \wedge E_1$
    $E_1 \vee E_2 = E_2 \vee E_1$

  - Assoziativgesetz (Zuordnungsgesetz)

    Resultat unabhängig von der Klammersetzung

    $E_1 \wedge E_2 \wedge E_3 = E_1 \wedge (E_2 \wedge E_3) = (E_1 \wedge E_2) \wedge E_3$
    $E_1 \vee E_2 \vee E_3 = E_1 \vee (E_2 \vee E_3) = (E_1 \vee E_2) \vee E_3$

  - Distributivgesetz (Verknüpfungsgesetz)

    Ausmultiplizieren und Ausklammern - (UND vor ODER, vergl. Punkt vor Strich)

    $E_1 \wedge (E_2 \vee E_3) = E_1 \wedge E_2 \vee E_1 \wedge E_3$
    $E_1 \vee (E_2 \wedge E_3) = (E_1 \vee E_2) \wedge (E_1 \vee E_3)$ Besonderheit der Schaltalgebra!

Besonderheiten

$E_1 \vee E_1 \wedge E_2 = E_1$
$E_1 \wedge (E_1 \vee E_2) = E_1$
$E_1 \wedge (\overline{E}_1 \vee E_2) = E_1 \wedge \overline{E}_1 \vee E_1 \wedge E_2 = E_1 \wedge E_2$
$E_1 \vee (\overline{E}_1 \wedge E_2) = (E_1 \vee \overline{E}_1) \wedge (E_1 \vee E_2) = E_1 \vee E_2$

De-Morgan-Theoreme

$\overline{E_1 \wedge E_2} = \overline{E}_1 \vee \overline{E}_2$
$\overline{E_1 \vee E_2} = \overline{E}_1 \wedge \overline{E}_2$
$\overline{\overline{E}_1 \wedge \overline{E}_2} = \overline{\overline{E}}_1 \vee \overline{\overline{E}}_2 = E_1 \vee E_2$

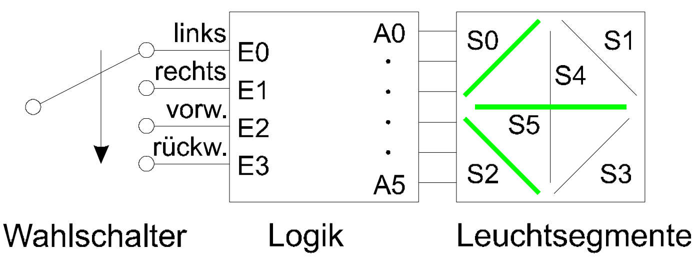
Minimierung mit KV-Diagramm

Grundlage: $E_1 \wedge E_2 \vee E_1 \wedge \overline{E}_2$
$= E_1 \wedge (E_2 \vee \overline{E}_2)$
$= E_1 \wedge 1$
$= E_1$

Beispiel:

Logische Schaltung

Eine Richtungsanzeige soll die Richtungen links, rechts, vorwärts und rückwärts mit Hilfe der Leuchtsegmente S0 bis S5 signalisieren können.



Mit dem Wahlschalter (4 mögliche Stellungen) werden die Eingangsvariablen E0 ... E3 angesteuert. Die Ausgangsvariablen A0 ... A5 steuern die Leuchtsegmente S0 ... S5 direkt an.

Vereinbarung:	E0 = 1 : Wahlschalter ein;	E0 = 0 : Wahlschalter aus usw.
	A0 = 1 : S0 leuchtet:	S0 = 0 : S0 leuchtet nicht usw.

vollständige Funktionsgleichung mit allen Ausgangssignalen

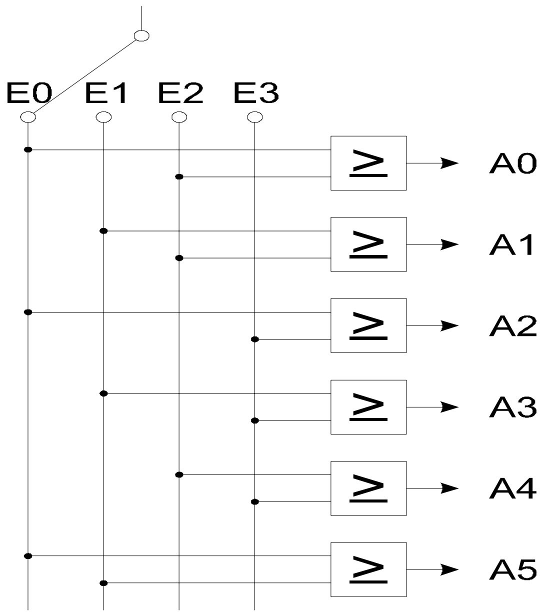
Oktal-Nr.	E3	E2	E1	E0	A5	A4	A3	A2	A1	A0
0	0	0	0	0						
1	0	0	0	1	1	0	0	1	0	1
2	0	0	1	0	1	0	1	0	1	0
3	0	0	1	1						
4	0	1	0	0	0	1	0	0	1	1
5	0	1	0	1						
6	0	1	1	0						
7	0	1	1	1						
10	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0
11	1	0	0	1						
12	1	0	1	0						
13	1	0	1	1						
14	1	1	0	0						
15	1	1	0	1						
16	1	1	1	0						
17	1	1	1	1						

(nicht eingetragene Signale können 0 oder 1 sein)

Schaltgleichungen in der disjuktiven Normalform

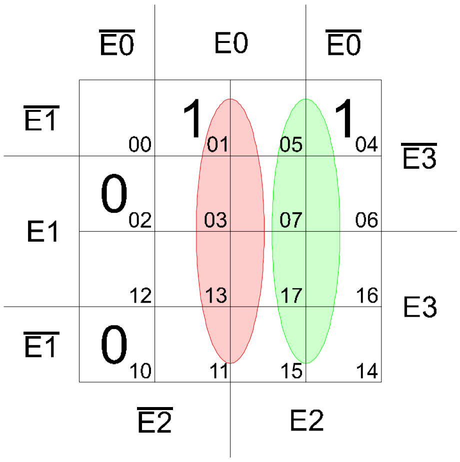
$$A_0 = \overline{E}_3 \wedge \overline{E}_2 \wedge \overline{E}_1 \wedge E_0 \vee \overline{E}_3 \wedge E_2 \wedge \overline{E}_1 \wedge \overline{E}_0$$
$$A_1 = \overline{E}_3 \wedge \overline{E}_2 \wedge E_1 \wedge \overline{E}_0 \vee \overline{E}_3 \wedge E_2 \wedge \overline{E}_1 \wedge \overline{E}_0$$
$$A_2 = \overline{E}_3 \wedge \overline{E}_2 \wedge \overline{E}_1 \wedge E_0 \vee E_3 \wedge \overline{E}_2 \wedge \overline{E}_1 \wedge \overline{E}_0$$
$$A_3 = \overline{E}_3 \wedge \overline{E}_2 \wedge E_1 \wedge \overline{E}_0 \vee E_3 \wedge \overline{E}_2 \wedge \overline{E}_1 \wedge \overline{E}_0$$
$$A_4 = \overline{E}_3 \wedge E_2 \wedge \overline{E}_1 \wedge \overline{E}_0 \vee E_3 \wedge \overline{E}_2 \wedge \overline{E}_1 \wedge \overline{E}_0$$
$$A_5 = \overline{E}_3 \wedge \overline{E}_2 \wedge \overline{E}_1 \wedge E_0 \vee \overline{E}_3 \wedge \overline{E}_2 \wedge E_1 \wedge \overline{E}_0$$

Schaltplan für die gesamte, minimierte Schaltlogik



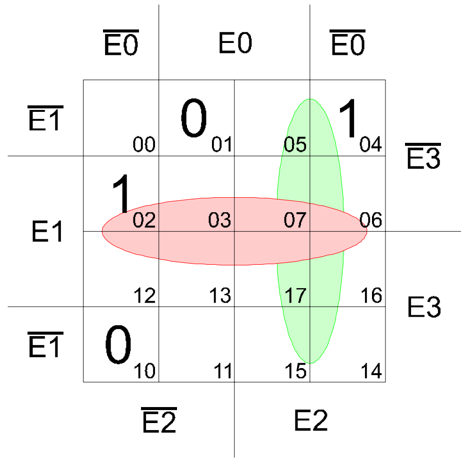
Minimieren mit Hilfe des Karnaugh-Diagramms

A0



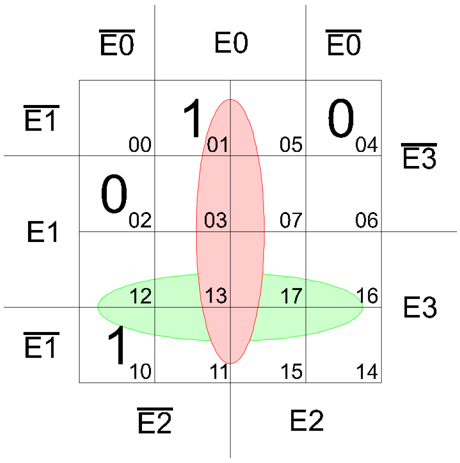
A0 = E0 v E2

A1



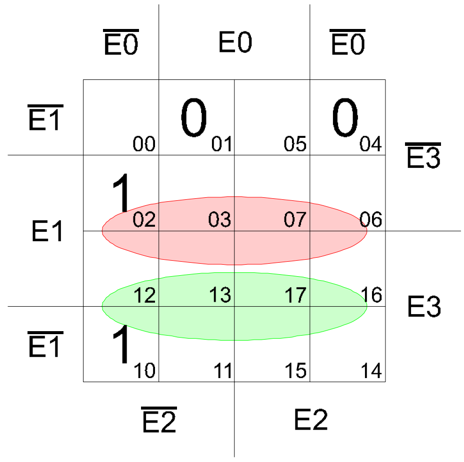
A1 = E1 v E2

A2



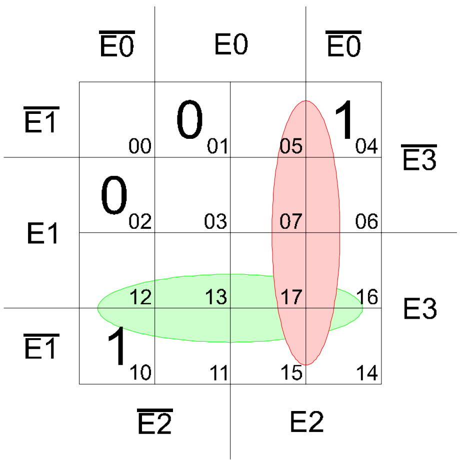
A2 = E0 v E3

A3



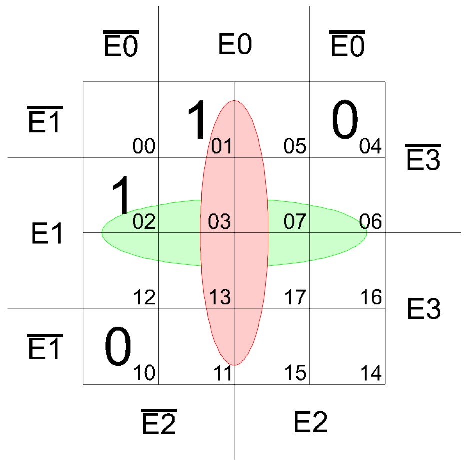
A3 = E1 v E3

A4



A4 = E2 v E3

A5



A5 = E0 v E1